고급 수학Ⅰ 주제 탐구 활동 보고서

※주의사항: 아래의 음영이 없는 빈칸을 모두 작성해야 합니다.

학번	31104	이름	박강민

탐구 주제	행렬을 이용한 진앙 위치 결정 알고리즘		
대단원	Ⅱ.행렬과 선형변환	중단원	3.행렬과 선형변환

<table>
<tr><td rowspan="4">서론</td><td rowspan="2">이론적 배경</td><td>▪자신이 탐구 활동을 하기 위해 알아본 고급 수학Ⅰ 관련 이론을 구체적으로 작성하시오.
(글자크기 10이며 10줄 이상 작성)</td></tr>
<tr><td>지진이 발생하면 P파와 S파가 서로 다른 속도로 전파되며, 관측소마다 지진파가 도달하는 시각이 달라진다. 특히 P파는 S파보다 먼저 도달하므로 여러 관측소에서 기록된 P파 도달 시각을 이용하면 지진이 발생한 위치를 추정할 수 있다. 일반적으로 진앙과 관측소 사이의 거리는 지진파의 속도와 도달 시간 차이의 곱으로 나타낼 수 있다. 관측소의 좌표를 (x_i, y_i), 진앙의 좌표를 (x, y), 지진 발생 시각을 t_0 관측소 i에 P파가 도달한 시각을 t_i, P파의 속도를 v라고 하면 $(x-x_i)^2+(y-y_i)^2=v^2\left(t_i-t_0\right)^2$이라는 관계식을 세울 수 있다. 이 식은 처음에는 제곱항이 포함된 비선형 방정식이지만, 기준 관측소의 식을 다른 관측소의 식에서 빼면 일차식 형태로 변형할 수 있다. 이렇게 얻은 여러 개의 일차식을 행렬 방정식 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$로 나타낼 수 있으며, 행렬 A는 미지수 벡터를 관측 자료 벡터로 보내는 선형 변환으로 해석할 수 있다. 또한 관측소 수가 많아지거나 측정 오차가 존재할 경우 정확한 해가 존재하지 않을 수 있으므로 최소제곱법을 이용해 오차의 제곱합을 최소화하는 해를 구할 수 있다. 이때 등장하는 A^TA는 대칭행렬이므로 대각화를 통해 오차가 크게 나타나는 방향과 작게 나타나는 방향을 고유값과 고유벡터의 관점에서 분석할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">탐구 대상</td><td>▪자신이 탐구하고자 하는 대상(예: 실험, 현상, 기존의 연구를 응용한 새로운 연구대상)이 무엇인지 구체적으로 작성하시오.(글자크기 10이며 5줄 이상 작성)</td></tr>
<tr><td>본 탐구에서는 실제 지진 자료 전체를 다루기보다는, 계산을 단순화한 2차원 평면 모델을 탐구 대상으로 설정하였다. 여러 지진 관측소의 위치 좌표와 각 관측소에 P파가 도달한 시각이 주어졌다고 가정하고, 이 자료를 이용하여 진앙의 위치를 추정하는 알고리즘을 구성하였다. 관측소 좌표는 평면 위의 점으로 나타내고, 진앙 좌표와 지진 발생 시각을 미지수로 설정하였다. 이후 거리와 시간의 관계식을 세운 뒤 이를 행렬 방정식으로 변환하는 과정을 탐구하였다. 또한 관측 자료에 오차가 포함될 수 있다는 점을 고려하여 최소제곱법과 대각화를 이용한 오차 분석까지 탐구 대상으로 포함하였다.</td></tr>
</table>

※다음 페이지에서 '본론', '결론'을 반드시 작성하여야 합니다.

본론 | **탐구 결과**

▪자신이 탐구한 결과를 구체적으로 작성하시오. 이곳에는 다른 사람의 연구결과, 블로그, 논문을 가져오는 것이 아니라 자신이 직접 발견한 내용을 서술하는 곳입니다.
(글자크기 10이며 15줄 이상 작성, 구글 표절 프로그램 작동)

먼저 관측소 i의 좌표를 (x_i, y_i), 진앙의 좌표를 (x, y), 지진 발생 시각을 t_0, P파 도달 시각을 t_i, P파 속도를 v라고 두었다. 그러면 진앙과 관측소 사이의 거리는 $v(t_i - t_0)$이므로 다음과 같은 식을 세울 수 있다.

$$\left(x - x_i\right)^2 + \left(y - y_i\right)^2 = v^2\left(t_i - t_0\right)^2$$

이 식은 x^2, y^2, t_0^2이 포함되어 바로 행렬 방정식으로 표현하기 어렵다. 따라서 기준 관측소 1번을 정하고, 다른 관측소의 식에서 1번 관측소의 식을 빼 보았다. 그 결과 공통으로 포함되어 있던 x^2, y^2, t_0^2항이 사라지고, x, y, t_0에 대한 일차식이 남는다는 점을 확인하였다. 즉, 비선형적인 거리 관계식을 여러 식의 차를 이용하여 선형적인 관계식으로 변환할 수 있었다.
이렇게 얻은 식들을 모으면 다음과 같은 행렬 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

여기서 $\mathbf{x}$는

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ t_0 \end{bmatrix}$$

이고, A는 관측소의 위치와 도달 시각으로 구성된 행렬이다. 이때 행렬 A는 단순한 수 배열이 아니라 진앙 좌표와 발생 시각으로 이루어진 벡터 $\mathbf{x}$를 관측 자료 벡터 $\mathbf{b}$로 보내는 선형 변환 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$로 해석할 수 있었다. 만약 관측소 수가 충분하고 오차가 없다면 역행렬 또는 연립방정식 풀이를 통해 $\mathbf{x}$를 구할 수 있다. 그러나 실제 관측 자료에는 도달 시각 측정 오차, 지진파 속도 변화, 지하 구조의 불균일성 등이 존재하므로 모든 방정식을 동시에 정확히 만족하는 해가 존재하지 않을 수 있다. 이 경우에는 $A\mathbf{x}$와 $\mathbf{b}$의 차이, 즉 오차 벡터의 크기를 최소로 만드는 해를 찾는 것이 더 현실적이라고 판단하였다. 이를 위해 최소제곱법을 적용하면 정규방정식

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

를 얻을 수 있고, $A^T A$의 역행렬이 존재할 때

$$\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b}$$

로 진앙의 추정 위치와 발생 시각을 구할 수 있다. 또한 $A^T A$는 대칭행렬이므로 대각화가 가능하다는 점에 주목하였다.

$$A^T A = PDP^{-1}$$

로 나타내면, D의 대각성분인 고유값은 특정 방향에서 관측 자료가 진앙 위치를 얼마나 잘 구분하는지를 나타낸다고 해석할 수 있다. 고유값이 큰 방향에서는 작은 오차가 결과에 크게 영향을 주지 않지만, 고유값이 작은 방향에서는 $(A^T A)^{-1}$을 계산할 때 $\frac{1}{\lambda}$가 커져 오차가 증폭될 수 있다. 따라서 대각화는 진앙 위치를 직접 구하는 계산 과정뿐 아니라, 추정 결과가 어느 방향으로 불안정한지 분석하는 데 활용될 수 있음을 알게 되었다. 이를 통해 행렬은 단순히 연립방정식을 푸는 도구가 아니라, 실제 관측 자료를 선형 변환으로 해석하고 오차를 분석하는 핵심적인 수학적 도구임을 확인하였다.

결론

논의 및 제언

▪자신이 탐구하면서 발견한 한계점을 분석하고 후속 탐구 활동을 어떠한 방향으로 진행할 것인지 작성하시오.(글자크기 10이며 5줄 이상 작성)

본 탐구에서는 진앙의 위치를 2차원 평면 위의 좌표로 단순화하여 분석하였다. 그러나 실제 지진의 진원은 깊이를 포함한 3차원 위치이므로 (x, y, z)좌표와 발생 시각 t_0를 함께 추정해야 한다는 한계가 있다. 또한 본 탐구에서는 지진파의 속도 v를 일정하다고 가정하였지만, 실제 지구 내부는 밀도와 물성이 일정하지 않아 지진파 속도가 위치에 따라 달라질 수 있다. 따라서 후속 탐구에서는 3차원 좌표계를 이용한 진원 추정 모델로 확장하고, 지진파 속도가 일정하지 않은 경우에도 적용 가능한 알고리즘을 조사하고 싶다. 또한 실제 관측소 자료를 이용해 행렬 A를 구성한 뒤, 고유값 분석을 통해 어떤 관측소 배치가 진앙 추정의 오차를 줄이는 데 효과적인지 탐구해 보고 싶다.

참고문헌

▪자신이 탐구하면서 참고한 문헌(논문, 저널, 도서 등의 출판물, 인터넷 백과서전, 블로그, 온라인 자료 등)의 제목과 링크를 1개 이상 작성하시오.

1. **IRIS, “How are Earthquakes Located?”**
2. **USGS, “Triangulation to Locate an Earthquake”**
3. **USGS, “Earthquake Travel Times”**