고급 수학Ⅰ 주제 탐구 활동 보고서

※주의사항: 아래의 음영이 없는 빈칸을 모두 작성해야 합니다.

학번	31104	이름	박강민

탐구 주제	극좌표와 극방정식을 이용하여 리만 제타함수 분석		
대단원	Ⅲ.복소수와 극좌표	중단원	2.극좌표와 극방정식

서론	이론적 배경	▪자신이 탐구 활동을 하기 위해 알아본 고급 수학Ⅰ 관련 이론을 구체적으로 작성하시오.(글자크기 10이며 10줄 이상 작성)
		이번 탐구에서는 극좌표와 극방정식을 이용하여 리만 제타함수를 복소평면 위에서 해석하고자 하였다. 일반적인 직교좌표에서는 한 점을 x좌표와 y좌표로 나타내지만, 극좌표에서는 원점으로부터의 거리 r과 기준축으로부터의 각 θ를 이용하여 점을 나타낸다. 즉, 복소수 z = x + yi는 z = r(cosθ + isinθ)의 꼴로 나타낼 수 있으며, 오일러 공식을 이용하면 z = re^(iθ)로 표현할 수 있다. 여기서 r은 복소수의 크기, θ는 복소수의 편각을 의미한다. 리만 제타함수 ζ(s)는 복소수 s에 대해 정의되는 함수로, 처음에는 실수부가 1보다 큰 영역에서 ζ(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + ... 와 같은 무한급수로 정의된다. 이 함수는 수론에서 매우 중요한 함수이며, 특히 소수의 분포와 깊은 관련이 있다. 리만 제타함수의 입력값 s를 복소수 s = σ + it로 두면, 함수값 ζ(s) 역시 일반적으로 복소수가 된다. 따라서 ζ(s)를 복소평면 위의 한 점 또는 벡터로 생각할 수 있다. 이때 ζ(s)의 함수값을 직교좌표 형태인 a + bi로만 보는 것이 아니라, 극좌표 형태인 r(cosθ + isinθ) 또는 re^(iθ)로 나타내면 함수값의 크기와 회전 방향을 따로 분석할 수 있다. 특히 ζ(s)의 값이 0에 가까워질 때는 극좌표에서 반지름 r이 0에 가까워지고, 편각 θ는 급격하게 변할 수 있다. 이러한 특징은 리만 제타함수의 영점, 즉 ζ(s) = 0이 되는 지점을 관찰하는 데 도움이 된다. 리만 가설은 리만 제타함수의 비자명한 영점들이 모두 실수부가 1/2인 직선 위에 존재한다는 주장이다. 이 직선은 복소평면에서 s = 1/2 + it로 나타낼 수 있으며, 임계선이라고 불린다. 본 탐구에서는 리만 가설 자체를 증명하는 것이 아니라, 임계선 위의 점들을 따라 ζ(s)의 값을 계산한다고 가정하고, 그 함수값이 복소평면에서 어떤 극좌표적 움직임을 보이는지 분석하는 것을 목표로 한다.
	탐구	▪자신이 탐구하고자 하는 대상(예: 실험, 현상, 기존의 연구를 응용한 새로운 연구대상)이 무엇인지 구체적으로 작성하시오.(글자크기 10이며 5줄 이상 작성)

	대상	이번 탐구의 대상은 리만 제타함수 ζ(s)의 함수값을 복소평면 위의 벡터로 나타냈을 때의 극좌표적 변화이다. 구체적으로는 입력값을 s = 1/2 + it로 두고, t값을 변화시키면서 ζ(s)의 값이 복소평면에서 어떤 위치로 이동하는지 살펴보고자 한다. 이때 ζ(s)의 값을 단순히 복소수 a + bi로 나타내는 것에서 그치지 않고, 원점으로부터의 거리 r과 편각 θ로 바꾸어 분석한다. 특히 리만 제타함수의 첫 번째 비자명한 영점이 존재한다고 알려진 t ≈ 14.1347 근처를 중심으로 탐구하였다. 이 근처에서 ζ(1/2 + it)의 크기 r이 어떻게 변하는지, 그리고 편각 θ가 어떻게 달라지는지를 관찰하였다. 만약 ζ(s)의 값이 0에 가까워진다면 복소평면에서 그 점은 원점에 가까워지고, 극좌표에서는 r값이 매우 작아질 것이다. 따라서 극좌표 표현을 이용하면 영점 근처에서 나타나는 함수값의 변화를 시각적으로 이해할 수 있다. 이번 탐구에서는 리만 제타함수의 모든 성질을 엄밀하게 증명하기보다는, 고급 수학Ⅰ에서 배운 벡터, 복소수의 크기와 방향, 극좌표의 개념을 바탕으로 복잡한 함수의 움직임을 해석하는 데 초점을 맞추었다. 즉, 리만 제타함수를 수론적 공식으로만 보는 것이 아니라, 복소평면 위에서 움직이는 벡터의 자취로 바라보는 것이 핵심 탐구 대상이다.

※다음 페이지에서 '본론', '결론'을 반드시 작성하여야 합니다.

본론	탐구 결과	**▪자신이 탐구한 결과를 구체적으로 작성하시오. 이곳에는 다른 사람의 연구결과, 블로그, 논문을 가져오는 것이 아니라 자신이 직접 발견한 내용을 서술하는 곳입니다. (글자크기 10이며 15줄 이상 작성, 구글 표절 프로그램 작동)**
		먼저 리만 제타함수의 입력값을 s = 1/2 + it로 두었다. 여기서 t는 실수이고, t값이 변하면 s는 복소평면에서 실수부가 1/2로 고정된 세로 직선 위를 움직인다. 이때 각 t값에 대해 ζ(s)의 값을 계산하면, 그 결과는 다시 복소수 a + bi가 된다. 따라서 ζ(1/2 + it)는 복소평면 위의 한 점으로 나타낼 수 있다. 이 복소수 값을 극좌표로 나타내면 다음과 같이 표현할 수 있다. ζ(1/2 + it) = r(cosθ + isinθ) = re^(iθ) 여기서 r = |ζ(1/2 + it)|이고, θ = arg ζ(1/2 + it)이다. 즉, r은 리만 제타함수 값의 크기이고, θ는 그 함수값이 복소평면에서 어느 방향을 향하는지를 나타낸다. 이 표현을 이용하면 ζ(s)의 함수값을 "원점에서 뻗어나간 벡터"로 해석할 수 있다. 탐구 과정에서 가장 중요하게 본 부분은 r값의 변화이다. 리만 제타함수의 영점은 ζ(s) = 0이 되는 점이므로, 극좌표로 보면 r = 0이 되는 점이다. 따라서 t값을 변화시키면서 r = |ζ(1/2 + it)|가 매우 작아지는 부분을 찾으면 영점 근처를 확인할 수 있다. 알려진 첫 번째 비자명한 영점은 대략 s = 1/2 + 14.1347i 근처에 존재한다. 따라서 t가 14.1347에 가까워질수록 r값은 0에 가까워진다고 볼 수 있다. 이를 극좌표 관점에서 해석하면, ζ(1/2 + it)의 자취는 복소평면 위에서 움직이다가 t ≈ 14.1347 근처에서 원점에 매우 가까이 접근한다. 직교좌표로만 보면 실수부와 허수부가 각각 0에 가까워지는 현상으로 보이지만, 극좌표로 보면 하나의 반지름 r이 작아지는 현상으로 더 간단하게 이해할 수 있다. 즉, 영점은 극좌표에서 "반지름이 0이 되는 순간"으로 해석된다. 또한 편각 θ의 변화도 중요한 특징을 보인다. 일반적으로 복소수의 편각은 원점을 기준으로 한 방향을 나타낸다. 그런데 함수값이 원점에 가까워질 때는 아주 작은 위치 변화에도 편각이 크게 변할 수 있다. 예를 들어 어떤 점이 원점의 오른쪽에 아주 가깝게 있다가 왼쪽으로

이동하면, 거리 변화는 작아도 각도는 크게 바뀐다. 따라서 ζ(s)가 영점 근처를 지날 때 편각 θ가 급격하게 변하는 현상이 나타날 수 있다.
이 점에서 리만 제타함수의 영점은 단순히 함수값의 크기가 0이 되는 곳일 뿐만 아니라, 복소평면상에서 함수값의 방향이 크게 전환되는 지점으로도 해석할 수 있다. 즉, 극좌표를 이용하면 영점을 "크기의 소멸"과 "방향의 급변"이라는 두 가지 관점에서 볼 수 있다. 이것은 직교좌표 표현만으로는 쉽게 드러나지 않는 특징이다.
또 다른 관찰은 ζ(s)의 값을 벡터로 볼 때, t값의 변화가 곧 벡터의 끝점이 그리는 곡선의 변화로 나타난다는 점이다. t가 증가할수록 ζ(1/2 + it)의 값은 복소평면 위에서 일정한 곡선을 그리며 이동한다. 이 곡선은 단순한 원이나 직선은 아니지만, 극좌표로 보면 r과 θ가 계속 변하는 극방정식 형태의 자취로 생각할 수 있다. 즉, ζ(1/2 + it)의 자취는 다음과 같이 볼 수 있다.
$r = |\zeta(1/2 + it)|,\ \theta = \arg \zeta(1/2 + it)$
이때 t를 매개변수로 생각하면, 리만 제타함수의 복소평면상 자취는 하나의 매개변수 극방정식처럼 해석할 수 있다. 일반적인 극방정식 $r = f(\theta)$는 각도에 따라 반지름이 정해지는 식이지만, 여기서는 t에 따라 r과 θ가 동시에 정해진다. 따라서 이 탐구에서는 리만 제타함수를 직접적인 극방정식 $r = f(\theta)$의 형태로 완전히 바꾸기보다는, t를 매개변수로 하는 극좌표 곡선으로 해석하였다.
탐구를 통해 내가 발견한 점은 리만 제타함수의 복잡한 성질도 극좌표를 이용하면 비교적 직관적으로 이해할 수 있다는 것이다. 특히 ζ(s)의 영점을 찾는 문제는 원래 매우 어려운 수학적 문제이지만, 극좌표 관점에서는 함수값 벡터의 길이가 0에 가까워지는 지점을 찾는 문제로 바꿔 생각할 수 있다. 또한 영점 근처에서 편각이 급격히 변한다는 점을 통해, 함수값의 크기뿐만 아니라 방향 변화도 영점 분석에 중요한 역할을 한다는 것을 알 수 있었다.
결론적으로 리만 제타함수 ζ(s)를 극좌표와 극방정식의 관점에서 바라보면, 함수값의 크기 r과 편각 θ의 변화를 분리하여 분석할 수 있다. 이를 통해 첫 번째 비자명한 영점 근처에서 r이 0에 가까워지고, θ가 급격히 변하는 특징을 확인할 수 있었다. 이 탐구는 리만 가설을 증명하는 것은 아니지만, 고급 수학Ⅰ에서 배운 벡터와 극좌표 개념을 이용해 고등 수학 이상의 복소함수를 시각적이고 기하적으로 해석해 본 활동이라는 점에서 의미가 있다.

결론 | 논의 및 제언

▪자신이 탐구하면서 발견한 한계점을 분석하고 후속 탐구 활동을 어떠한 방향으로 진행할 것인지 작성하시오.(글자크기 10이며 5줄 이상 작성)

이번 탐구의 한계는 리만 제타함수의 값을 실제로 정밀하게 계산하거나 그래프로 직접 나타내는 과정이 충분히 포함되지 않았다는 점이다. 리만 제타함수는 단순한 다항함수나 삼각함수와 달리 복소수 영역에서 매우 복잡하게 움직이기 때문에, 손계산만으로는 정확한 값을 구하기 어렵다. 따라서 이번 탐구에서는 알려진 첫 번째 비자명한 영점 근처의 성질을 바탕으로 극좌표적 해석을 진행하였다.
또한 극좌표 표현은 함수값의 크기와 방향을 이해하는 데 유용하지만, 이것만으로 리만 가설을 증명할 수 있는 것은 아니다. 리만 가설은 모든 비자명한 영점이 실수부 1/2 위에 존재한다는 매우 깊은 명제이므로, 단순한 시각화나 좌표 변환만으로 해결할 수 없다. 따라서

이번 탐구는 리만 가설의 증명이 아니라, 리만 제타함수의 영점을 기하적으로 이해하는 데 목적이 있다.
후속 탐구에서는 Python이나 GeoGebra와 같은 도구를 이용하여 $\zeta(1/2 + it)$의 값을 실제로 계산하고, 복소평면 위의 자취를 그래프로 나타내 보고 싶다. 특히 t값을 0부터 30까지 변화시키면서 $r = |\zeta(1/2 + it)|$의 그래프를 그리고, r이 작아지는 지점과 알려진 영점의 위치가 일치하는지 확인해 볼 수 있다. 또한 편각 θ의 변화량을 함께 분석하면, 영점 근처에서 방향이 어떻게 변하는지도 더 구체적으로 탐구할 수 있을 것이다.
더 나아가 임계선이 아닌 $s = \sigma + it$에서 σ값을 1/2가 아닌 다른 값으로 바꾸었을 때 $\zeta(s)$의 자취가 어떻게 달라지는지도 비교해 볼 수 있다. 이를 통해 왜 실수부 1/2인 직선이 리만 제타함수에서 특별한 의미를 가지는지 더 깊이 이해할 수 있을 것이다.

참고문헌

▪자신이 탐구하면서 참고한 문헌(논문, 저널, 도서 등의 출판물, 인터넷 백과서전, 블로그, 온라인 자료 등)의 제목과 링크를 1개 이상 작성하시오.

1. Wikipedia, “Riemann zeta function” https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function
2. Wikipedia, “Riemann hypothesis” https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis
3. Wolfram MathWorld, “Riemann Zeta Function” https://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html
4. NIST Digital Library of Mathematical Functions, “Zeta and Related Functions” https://dlmf.nist.gov/25